① a) $f(x) = 1 + 4x + x^2 h(x)$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + 4x + x^2 h(x) - (1 + 4(0) + 0^2 h(0))}{x}$$

$$= \lim \frac{\cancel{1} + 4x + x^2 h(x) - \cancel{1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 4 + x h(x) \quad //$$

h(x) es una funcion acotada

$$|h(x)| \leq M \quad \text{para algún } M > 0$$

$$-M \leq h(x) \leq M \quad , \quad x > 0$$

$$-Mx \leq x h(x) \leq M x$$

cuando $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} x h(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} 4 + x h(x) = 4 \quad , \quad f'(0) = 4$$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x$$

$$= \lim_{x \to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \underbrace{\lim_{x \to 0} x}_{0} = 0$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \implies \lim_{x \to} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$f(0) = 0 \implies \exists \lim_{x \to 0} f(x)$

Para $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1\ )$$

Para $x \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2\cos\left(\frac{1}{h}\right) + h - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m, & x \leq 1 \\ -x^2 + nx, & x > 1 \end{cases}$

Análisis de continuidad

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 5x + m = -4 + m$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -x^2 + nx = -1 + n$$

$$f(1) = 1 - 5 + m = -4 + m$$



$-4+m=-1+n$

$\Rightarrow m=3+n$

$$f'(x)=\begin{cases}2x-5, & x<1\\ -2x+n, & x>1\end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x-5=-3$

$\lim_{x\to 1^+} -2x+n=-2+n$

$\exists f'(x)$

$\Leftrightarrow -3=-2+n$

$\Rightarrow n=-1$

$m=3+(-1)$

$=2$ //

d) $y = f\left(\frac{x}{x-2}\right)$, $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{x}{x-2}\right) * \left(\frac{x}{x-2}\right)' = f'\left(\frac{x}{x-2}\right) * \frac{(x-2-x)}{(x-2)^2}$$

$$= f'\left(\frac{x}{x-2}\right) * \left(\frac{-2}{(x-2)^2}\right)$$

$$f'\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{\frac{x}{x-2} - 1}{\left(\frac{x}{x-2}\right)} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{-2}{(x-2)^2}\right)$$

---

(2) a) $(f' \circ g')(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[(f' \circ g')(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f'(g(x)) \cdot g'(x)\right]$$

$$= f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(f' \circ g')(x)\right] = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) * g''(x)$$

$$\frac{d^2}{dx}\left[(f' \circ g')(x)\right] = f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + f''(g(x)) * 2(g'(x))g''(x)$$

$$+ f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) +$$

$$f'(g(x)) \cdot g'''(x)$$

2) b) $f(g(x)) = 8x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g''(2) = ?$

Datos (

$g(2) = 4$

$f'(4) = 2$

$f''(4) = g'(2)$

$= -2$

$f'(g(x)) * g'(x) = 16x$

$f''(g(x))\, g'(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) * g''(x) = 16$

$f''(g(2))(g'(2))^2 + f'(4) * g''(2) = 16$

$(-2)(4) + 2g''(2) = 16$

$\Rightarrow g''(2) = 12$

③ a) $U(p) = 2p e^{-0,1p}$

$U'(p) = 2 e^{-0.1p} - 0,2 p e^{-0.1p}$

cuando $p = 5$

$U'(5) = 2 e^{-0.5} - e^{-0.5} = e^{-0.5}$

por cada unidad adicional vendida a precio de 5um, la compañia obtendria una utilidad adicional de $e^{-0.5}$ um

la utilidad marginal representa el cambio en la utilidad total respecto al cambio en el precio p

b) $\overline{C(q)} = \frac{a}{4}q + a + \frac{70}{q}$, $a > 0$

$CT(q) = \overline{C(q)} * q$

$= \frac{a}{4}q^2 + aq + 70$

Entonces el costo Marginal viene dado de la siguiente manera

$$CMg = \frac{dCT}{dq} = \frac{a}{2}q + a$$

$$CT(2) = 100$$

$$\frac{a(4)}{4} + a(2) + 70 = 100$$

$$\Rightarrow a = 10$$

$$\Rightarrow CMg(10) = \frac{10}{2}(10) + 10 = 60\ um$$

El costo marginal=60 indica que el costo adicional por producir una unidad adicional del producto, cuando ya se estan produciendo 10und, es de 60um

c) Recordar que el ingreso total: $IT = pq$

De la ecuacion de la demanda: $p = 20 - q$

$$IT(q) = (20-q)q = 20q - q^2$$

funcion de utilidad: $U(q) = IT - CT$

$$UMg(q) = IMg(q) - CMg(q)$$

$$= 20 - 2q - (3q^2 + 4)$$

$$= -3q^2 - 2q + 16$$

$$UMg(1) = 11$$

la utilidad marginal de 11 indica que al aumentar la produccion en una unidad adicional, la utilidad del monopolista aumenta en 11 unidades monetarias.

(4) a) $1 + x^3 y + x = \sqrt{y}$

$$\Downarrow$$

$$3x^2 y + x^3 \frac{dy}{dx} + 1 = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx}$$

Cuando $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2$$

$$y(x) \approx y(0) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} \cdot x$$

$$= 1 + 2x$$

b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

r : radio de la base cono
h : es la altura del cono

$h = 2r = 2(2) = 4 cm$

$V = \frac{1}{3}\pi (2)^2 (4) = \frac{16}{3}\pi cm^3$

$\Delta r = 0.01 cm$

$\Delta V \simeq \left(\frac{dV}{dr}\right)\Delta r$

$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{3}\pi (2r) h$

$$\Delta V = \left(\frac{16}{3}\pi\right)(0.01) \simeq 0,16752 \text{ cm}^3$$